

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНОО «Физтех-лицей»
им. П.Л. Капицы

М.Г. Машкова
«21» 09 2025г.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА
(демоверсия)

МАТЕМАТИКА
2024-2025 учебный год

10 класс (профильный уровень)

Алгебра.

1. а) Вычислить:

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right) + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) + \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 25^\circ \cos 15^\circ - \cos 115^\circ \sin 165^\circ}$$

ИЛИ

Докажите тождество:

$$\frac{2\cos^2 x - \cos(\pi - 5x) - 1}{\sin 5x + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\sin 2x} = \operatorname{ctg} \frac{9x}{2}$$

б) Вычислить:

$$\frac{\log_4 27 - \log_2 3}{\log_4 45 + \log_4 0,2} \cdot 0,2^{\frac{\lg 2 - \log_{0,1} 5}{1 - \lg 2}}$$

ИЛИ

Найдите

$$\log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} \right), \text{ если } \log_{\frac{a}{b}} a = -2$$

2. а) Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x + \sqrt{3} \sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

ИЛИ

а) Решите уравнение: $\sin(\pi - 2x) - 2\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3\cos x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

3. а) Решите уравнение: $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$

ИЛИ

а) Решите уравнение: $8^x - 5 \cdot 2^{x+1} - 16 \cdot 2^{-x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 10]$

4. а) Решите неравенство:

$$3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$$

ИЛИ

$$\log_{x+3}(2x^2 - 20x + 48) \geq \log_{x+3}(x^2 - 9)$$

б) Решите неравенство

$$\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$$

ИЛИ

$$3^x + \frac{2 \cdot 3^{x+1}}{3^x - 3} + \frac{9^x + 26 \cdot 3^x + 21}{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27} \leq 1$$

5. В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат составит 930 тысяч рублей?

ИЛИ

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

ИЛИ

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите $r\%$.

6. Найдите все значения α , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-\alpha) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+\alpha)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

ИЛИ

Найдите все значения α , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - \alpha^2}{3x - 9 - 2\alpha} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

7. Найдите все значения α , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (\alpha + 7)^2 = |x - 7 - \alpha| + |x + \alpha + 7|$$

имеет единственный корень.

ИЛИ

Найдите все значения α , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+\alpha} - 4^{x^2-5x+4\alpha} = x^2 - 8x + \alpha$$

не имеет действительных решений.

Геометрия.

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

ИЛИ

В трапеции $ABCD$ основание AD два раза больше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы DCM и ABM прямые.

а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD , если угол ADC равен 60° , а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC .

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точка K лежит на ребре SC и делит его в отношении 1:3, считая от вершины. Точка M — середина AS . Через MK проведено сечение, параллельное прямой DC .

а) Докажите, что сечение является равнобедренной трапецией.

б) Найдите угол между прямыми MK и DC , если $SA = AB = 16$.

ИЛИ

Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (угол C - прямой), боковые грани призмы, содержащие ребра AC и BC , - квадраты. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

3. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

ИЛИ

В тетраэдре $DABC$ известно, что $AC = AB = 15$ см., $DB = DC = 13$ см., $AD = 14$ см., $BC = 12\sqrt{2}$ см. Найдите угол между плоскостями BAD и CAD .

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом.

а) Докажите, что расстояние между прямыми A_1B и AM равно длине перпендикуляра, опущенного из центра этого квадрата на прямую A_1B .

б) Найдите это расстояние.

ИЛИ

На ребре DC тетраэдра $DABC$ отметили точку M так, что $DM:MC = 1:2$. Известно, что $AB = BC, AD = DC = 15$ см, $AC = 18$ см. Найдите расстояние между прямыми BM и AC .

5. Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT:TM = 3:1$.

а) Докажите, что плоскость CPT делит высоту MD треугольника AMB в отношении $1:2$, считая от точки M .

б) Вычислите площадь поверхности пирамиды $MPTC$.

ИЛИ

Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 6 см² и 8 см².