

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНОО «Физтех-лицей»
им. П.Л. Капицы
М.Г. Машкова
«21» 09 2025г.

МАТЕМАТИКА. ГЕОМЕТРИЯ

2024-2025 учебный год

10 класс (Математический профиль)

Вопросы и задачи для экзамена

Введение в стереометрию

Аксиомы стереометрии. Следствия.
Многогранники.
Скрещивающиеся прямые. Признак.
Построение сечений методом следов.
Построение сечений методом проектирования.

Параллельность прямых и плоскостей.

Теорема о единственности прямой, параллельной данной.
Теорема о параллельности прямых, одна из которых пересекает плоскость.
Теорема о двух прямых, параллельных третьей.
Угол между двумя скрещивающимися прямыми.
Перпендикулярные прямые.
Признак параллельности прямой и плоскости.
Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.
Признак параллельности плоскостей.
Теорема о пересечении двух параллельных плоскостей третьей.
Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями
Теорема о единственности плоскости, содержащей одну из скрещивающихся прямых и параллельной другой прямой

Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение прямой, перпендикулярной плоскости
Признак перпендикулярности прямой и плоскости
Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости
Теорема о двух перпендикулярах к одной плоскости
Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Проекция наклонной на плоскость
Теорема о наклонных и их проекциях
Проекция точки на плоскость. Проекция фигуры на плоскость. Проекция прямой на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью
Теорема о трёх перпендикулярах
Теорема о трёх косинусах
Расстояние от точки до прямой
Расстояние между параллельными прямыми
Расстояние от точки до плоскости
Расстояние между параллельными прямой и плоскостью
Расстояние между параллельными плоскостями
Ортоцентрический тетраэдр

Перпендикулярность плоскостей

Расстояние между скрещивающимися прямыми.
Определение двугранного угла. Бисектор.
Линейный угол двугранного угла.
Угол между плоскостями.
Определение перпендикулярных плоскостей.
Признак перпендикулярности плоскостей.
Теорема о перпендикуляре к линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей.
Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.
Площадь ортогональной проекции.

Векторы и аналитическая геометрия

Определители второго и третьего порядка. Свойства определителей
Понятие вектора
Линейные операции над векторами
Линейная зависимость векторов в трехмерном пространстве
Координаты вектора и точки в заданном базисе
Проекция вектора на ось
Скалярное произведение векторов
Векторное произведение векторов
Смешанное произведение векторов
Различные виды уравнений прямой на плоскости и их геометрические приложения
Различные виды уравнений прямой в пространстве
Расстояние от точки до прямой
Уравнение пучка прямых
Плоскость и ее уравнение
Уравнение пучка плоскостей
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
Расстояние от точки до прямой
Расстояние между параллельными прямыми
Расстояние от точки до плоскости
Расстояние между параллельными прямой и плоскостью
Расстояние между параллельными плоскостями
Уравнение сферы
Уравнение пучка сфер

Примеры задач.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение $M N K$, где точка M – середина ребра AD , точка N лежит на ребре AB так, что $AN : NB = 1 : 3$, точка K – на ребре AA_1 такая, что $AK : KA_1 = 1 : 4$. Найдите угол между плоскостями MNK и $A_1 B_1 C_1$.
2. В тетраэдре $PABC$ плоскость α содержит ребро PA и биссектрису угла BPC ; плоскость β содержит ребро PB и биссектрису угла APC ; плоскость γ содержит ребро PC и биссектрису угла APB . Докажите, что α , β и γ имеют общую прямую.
3. На прямой, проходящей через вершину A равностороннего треугольника ABC со стороной 1 перпендикулярно плоскости ABC , по разные стороны от этой плоскости отложены отрезки $AD = AE = 1$. Точка M – середина отрезка BE . Найдите угол и расстояние между прямыми DE и CM .
4. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q – середина ребра $A_1 C_1$. Через середину ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .
 - А) В каком отношении плоскость α делит ребро AC , считая от точки A ?
 - Б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок $A_1 C_1$, считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 7$.
5. Плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ равны 90° . Обозначим через α , β и γ – двугранные углы при рёбрах соответственно AB , BC и AC . Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
6. Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин противоположных рёбер равны.