

Тренировочные задачи к переводному экзамену по алгебре для 10 класса
(математический профиль)



1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 3a + 2x \geq x^2, \\ a \leq 2\sqrt{x}, \\ 2a + x \leq 5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$6a + \sqrt{-24 - 10x - x^2} = ax + 1.$$

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x + 2a - 1)^2 + (y + 5a - 2)^2 = 4, \\ (x - 3a + 1)^2 + (y - 6a + 5)^2 = 9. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + 6 = |x| + a, \\ x^2 + (y + 3a - 13)^2 = 9. \end{cases}$$

5. Упростите выражение $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} \operatorname{ctg}(\alpha - \frac{5\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\alpha - \pi)$.

6. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 5\alpha} - \operatorname{tg}(2\alpha)$.

7. Вычислите $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha$.

8. Известно, что $\sin y = 2 \cos x + \frac{5}{2} \sin x$ и $\cos y = 2 \sin x + \frac{5}{2} \cos x$. Найдите $\sin 2x$.

9. Найдите значение выражения $\cos^4 \frac{7\pi}{24} + \sin^4 \frac{11\pi}{24} + \sin^4 \frac{17\pi}{24} + \cos^4 \frac{13\pi}{24}$.

10. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n}$.

11. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^3 + 1} - n\sqrt{n}}$.

12. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n}}$.

13. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2n}$.

14. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n}{n^2 + 2n + 2} \right)^n$.

15. Решите уравнение $(3 - 2 \cos^4 6x)(1 - \operatorname{ctg}^2 x)(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x)(1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x) = 1$.

16. Решите уравнение $\cos^2 2x + \frac{1}{4} \sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x$.

17. Найдите все решения уравнения $\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

18. Найдите все корни уравнения

$$4 \sin 3x + \sqrt{2} \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 4 \cos 3x - 4\sqrt{2}$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$

19. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}$.

20. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{2x^3 - 3x^2 + 1}$.

21. Вычислите $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right)$.

22. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

23. Решите уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1} = 2, 25^{x+\sqrt{x}-1}$.

24. Решите уравнение $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

25. Решите уравнение $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$.

26. Решите уравнение $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-2} - 3^{x-2}$.

27. Решите уравнение $0,81^{x-1} - 0,9^{2x-3} + 0,01^{x-1,5} - 9 \cdot 0,1^{2x-2} = 0$.

28. Решите уравнение $3 \cdot 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{4-x} - 5 = 0$.

29. Решите неравенство $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

30. Решите неравенство $4^{3x^2+x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

31. Решите уравнение $\log_{x^2-2x} (2 - 3^{4x-x^2}) = \log_{6-x} (2 - 3^{4x-x^2})$.

32. Найдите решения $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2(3y - 3x + 1) - \log_4(x - 3y)^2 = 1, \\ \log_2\left(1 - \frac{1}{y} - 3x\right) - \log_4 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - 3y < 0$.

33. Решите неравенство $\frac{(x^2+x) \lg(2x^2+4x-4)}{|x+2|} \geq \frac{\lg(-2x^2-4x+4)^2}{x+2}$.

34. Решите неравенство $\log_{(3^x-3)^2} \left(9^{x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 3^{x+1} + 36 \right) - \log_{(3^x-3)^{-2}} (3^{2x-1} - 3^{x+1} + 6) \geq \frac{3}{2}$.

35. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \ln x - x \cdot \ln 2$ на промежутке $\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

36. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2 \sin 3x + 16 \sin^2 x$.

37. Постройте график функции $y = x \cdot e^{-x}$.

38. Постройте график функции $y = e^{\sin x}$.