

УТВЕРЖДАЮ
Директор АНОО «Физтех-лицей»
им. П.Л. Капицы

М.Г. Машкова
« 21 » 04 2025г.

МАТЕМАТИКА
2024-2025 учебный год

8 класс (математический профиль)

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

1. Вычислите сумму $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 103}$.
2. Упростите выражение:
а) $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}$;
б) $\frac{1}{\sqrt{14-5\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+16)}{22}$.
3. Докажите, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.
4. Пусть $a + b = 3$ и $ab = 1$. Найдите а) $a^3 + b^3$; б) $a^4 + b^4$.
5. Известно, что $a + b + c = 6$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Найдите $ab + bc + ca$.
6. Докажите, что а) $19^5 + 36^5 - 64 : 17$; б) при всех натуральных n выражение $5^{2n} - 1 : 12$.
7. Докажите, что ни при каком натуральном n значение выражения $1 + n + n^2 + n^3$ не является степенью числа 3.
8. Решите уравнение $x^2 + x + 3 = 5y$ в целых числах.
9. Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что $[m; n] - (m; n) = \frac{mn}{3}$.
10. Сколько собственных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20}$?
11. Найдите натуральное число n , если $[\sqrt{2n-11}] = 45$, остаток при делении n на 11 равен 3 и остаток при делении n на 13 равен 10.
12. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.
13. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .
14. Найдите все натуральные числа n , удовлетворяющие условию: $(n < 50) \wedge (d(n) = 6)$.
15. Решите уравнения:
а) $\sqrt{x+7-4\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+3} = 2$;
б) $(x+1)\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} + \sqrt{x^2-2x-3} + 2x+4 = 0$;

$$\text{в) } \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}};$$

$$\text{г) } \min\{3x-1; 3-x\} = x^2.$$

16. Известно, что x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 - 14x + 5 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $x_1^3 + x_2^3$.
17. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a} = \sqrt{2|x-1| - 3a}$ имеет два корня?
18. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-1)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет не более одного корня?
19. Определите количество корней уравнения $|x-a| + |x| = 2$ в зависимости от значения параметра a .
20. При каких значениях параметра a уравнение $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет единственное решение?
21. Смешивается некоторое количество 72 -процентного раствора кислоты и некоторое количество 58 -процентного раствора кислоты и в результате получается 62 -процентный раствор. Если бы каждого раствора было взято на 15 л больше, то получился бы 63,25 процентный раствор. Сколько литров каждого раствора было взято первоначально для составления первой смеси?
22. Решите неравенства:
- $\frac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}} \geq 0;$
 - $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-3)(x-2) \leq 1;$
 - $\sqrt{\frac{10x+1}{x-3}} \leq 3;$
 - $\sqrt{2x + |x+3|} < \sqrt{5};$
 - $x < \sqrt{x^2 - 16} + 2;$
 - $\sqrt{5 - |x-1|} \geq \sqrt{x}.$
23. Докажите неравенства:
- $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0;$
 - $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$ при $a, b, c \geq 0.$
24. Для каждого значения a решите неравенство $x^2 - ax + 3 \leq 0$.
25. При каких значениях a неравенство $\sqrt{2x - |x+a|} < 3$ имеет множество решений, содержащее промежуток $[2; 5]$?
26. Найдите область определения и область значения функции $y = \frac{x^2-5}{x^2-6x-16}.$
27. Изобразите график неравенства:
- $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0;$
 - $y \leq |x^2 - 4|x||;$
 - $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} \geq 0;$
 - $\frac{x^2+y^2-4}{|y|} < 0.$
28. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем:
- 12 открыток;
 - 8 открыток;
 - 8 различных открыток?

29. Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.
30. Вычислите сумму $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \dots + C_{100}^{100}$.
31. Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?